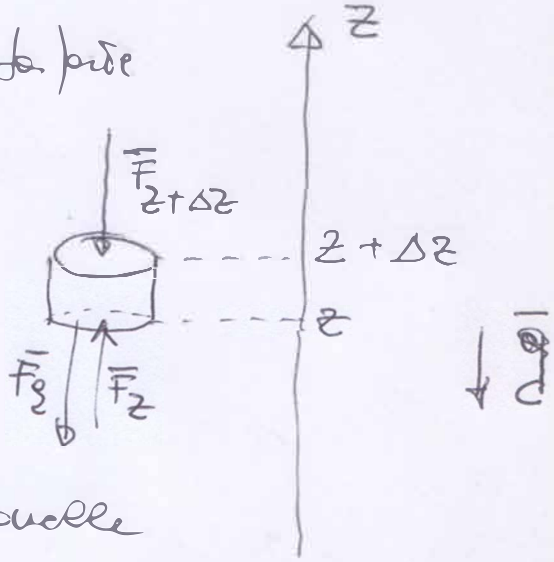
Legge di Archimede



Abbiamo ricavato (lasciando da parte le forze di superficie laterali che si annullano a vicenda)

$$\bar{F}_g + \bar{F}_{z+\Delta z} + \bar{F}_z = \bar{\phi}$$

per un fluido immerso nel suo stesso fluido.

Le forze di volume sono quelle proporzionali alla massa

$$\bar{F}_V = \bar{F}_g$$

mentre le forze di superficie sono quelle dovute al contatto tra le parti confinanti l'elemento di volume considerato

$$\bar{F}_S = \bar{F}_{z+\Delta z} + \bar{F}_z$$

da cui

$$\bar{F}_V + \bar{F}_S = \phi$$

e quindi

$$\bar{F}_S = -\bar{F}_V$$

Le forze di superficie sono quelle ~~da~~, dovute alla presenza del fluido attorno all'elemento di volume considerato (e sono quelle che danno luogo alla pressione.

ICTP
www.ictp.it

Chiameremo queste forze "Spinta di Archimede". Quindi

$$\bar{F}_A = \bar{F}_S = -\vec{F}_V = -\rho V \vec{g}$$

ma $\bar{g}$ ha il verso opposto alla direzione dell'asse z e pertanto, in modulo

$$F_A = \rho V g \qquad > 0$$

per questo si chiama "Spinta di Archimede"

Forza diretta verso l'alto

Se ora al posto del fluido dentro il volume mettiamo un corpo di densità ρ_c, la spinta di archimede NON cambia (dipende dal fluido che circonda il corpo) e pertanto la nuova forza di volume può dire:

$$\bar{F}_V + \bar{F}_A = m\bar{a} \gtreqless \bar{\phi}$$

scrivendolo in modulo

$$-\rho_c V g + \rho V g = \rho_c V \cdot \frac{d^2 z}{dt^2}$$

avendo posto $a = \frac{d^2 z}{dt^2}$ accelerazione

divido tutto per V ed ottengo

$$-\rho_c g + \rho g = \rho_c \frac{d^2 z}{dt^2}$$

e dividendo tutto per ρ_c ottengo

$$a = \frac{d^2z}{dt^2} = g\left(\frac{\rho}{\rho_c} - 1\right)$$

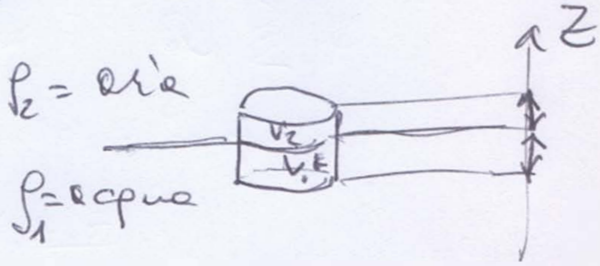
pertanto abbiamo

$\rho > \rho_c \Rightarrow$ accelerazione verso l'alto

$\rho = \rho_c$ = nessuna accelerazione

$\rho < \rho_c \Rightarrow$ accelerazione verso il basso

nel caso in cui $\rho > \rho_c$ il corpo sale verso l'alto fino a raggiungere la superficie. A quel punto le forze di superficie che agiscono sul corpo cambiano in quanto le forze di superficie sono proporzionali alla densità del fluido che circonda il corpo



$$-\rho_c V g + \rho_1 V_1 g + \rho_2 V_2 g = \phi \quad \text{equilibrio}$$

ma $\rho_2 \ll \rho_1$ $\quad \rho_2 \ll \rho_c$ pertanto

$$-\rho_c V + \rho_2 V_2 = \phi$$

e quindi

$$V_2 = \frac{\rho_c V}{\rho_2} \qquad \rho_2 = \rho_{acqua}$$

ma $\rho_c V$ è la massa del corpo, mentre

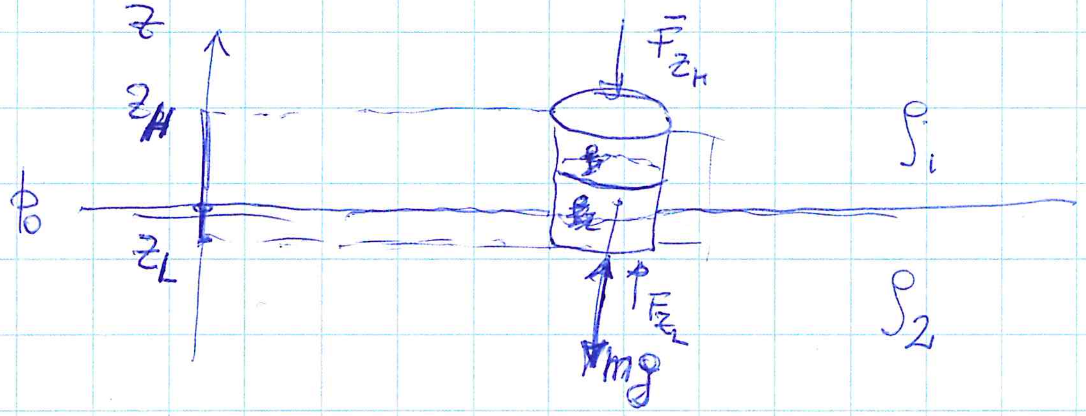
$$\rho_2 V_2$$

rappresenta la massa di acqua spostata dalla nave fino al punto di minimo galleggiamento. Il volume V_2 rappresenta la stazza della nave, ed essendo $\rho_2 = \rho_{acqua} \cong 1$ Tonnellata$/m^3$, la stazza si misura in tonnellate

- Problema di Archimede
  1. Corpo immerso in diversi liquidi
  2. Corpo con densità NON uniforme

- Cominciamo con il problema 2, meno problematico del 1.

Dall'espressione della statica dei fluidi quello che conta è la massa del corpo m e la sua densità MEDIA che definisce il volume spostato.



$$A = V/h$$

$$z_H - z_L = h$$

L'equilibrio è sempre definito da

$$\bar{F}_{z_L} + \bar{F}_{z_H} + \bar{F}_g = \phi$$

quindi, detta $\bar{\rho}$ la densità MEDIA del corpo di massa m, il suo volume è $V = \frac{m}{\bar{\rho}} \Rightarrow m = \bar{\rho} V$

Ora $\bar{F}_{z_L} + \bar{F}_{z_H} = -\bar{F}_g$

$$F_{z_L} = \left[p_0 - z_L \rho_2 g\right] A \qquad F_{z_H} = \left[p_0 - z_H \rho_1 g\right] A$$

quindi all'equilibrio

$$\left[p_0 - z_L \rho_2 g\right] A - \left[p_0 - z_H \rho_1 g\right] A = \langle\rho\rangle V g = \langle\rho\rangle A h g$$

da cui

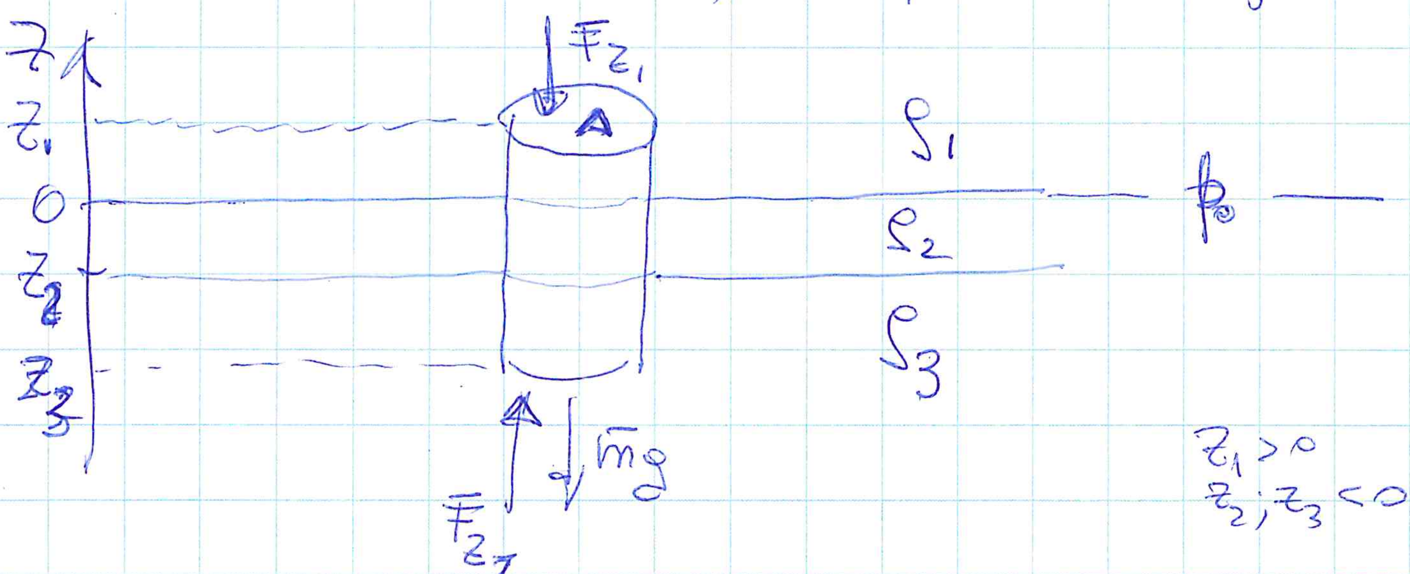
$$-z_L \rho_2 + z_H \rho_1 = \langle\rho\rangle h$$

Nel caso in cui $\rho_1 \ll \rho_2$ si può trascurare ρ_1 (caso dell'aria) e l'equazione diventa

$$-z_L \rho_2 = \langle\rho\rangle h$$

Ricordandoci che $z_L < 0$!

Se abbiamo diversi strati di fluido di densità diverse, si ragiona analogamente



$$F_{z_3} = p_3 \cdot A = \left[p_0 - \rho_2 g z_2 - \rho_3 g (z_3 - z_2)\right] A$$

$$F_{z_1} = p_1 \cdot A = \left[p_0 - \rho_1 g z_1\right] A$$

Supponiamo ancora che $\rho_1 \ll \rho_2 ; \rho_3$
Anche in questo caso

$$F_{z_1} \cong p_0 A$$

$$F_{z_3} - F_{z_1} = \left[-\rho_2 g z_2 - \rho_3 g (z_3 - z_2) \right] \cancel{A} = m g$$

di nuovo $m = \langle \rho \rangle \cdot V = \langle \rho \rangle \cdot A \cdot h$

$$-\rho_2 z_2 - \rho_3 (z_3 - z_2) = \rho \cdot h$$

Quindi l'espressione di Archimede risulta valida in generale
"Un corpo riceve una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del liquido spostato"
(qualunque sia il liquido ed eventuali strati).